

Droga hamowania teoretyków i praktyków

Stanisław Plebański

Kalisz, 04.04.2021

*Wydaje się, że gdyby uczniom zabroniono zapamiętywać „wzory”, to zapamiętaliby je bez trudności.
Wojciech Dindorf, Elżbieta Krawczyk,
O stosunkach w fizyce*

Zamiast wstępu

Na początku roku 2021 czytałem z zainteresowaniem książkę popularnonaukową francuskiego matematyka Mickaela Launay *Teoria parasola, czyli jak matematyka wywraca świat do góry nogami*. Na trzech stronach autor rozpisывał się o drodze hamowania. W tym czasie śledziłem też dyskusję dotyczącą tarcia, inicjowaną przez Wojtka Dindorfa, na forum uczestników Jesiennych Szkół „Problemy Dydaktyki Fizyki” w Borowicach oraz w e-czasopiśmie „Moja Fizyka”. W marcu 2021 rozważania on-line dotyczyły drogi hamowania. Wziąłem się więc za „drogę hamowania” uwzględniając sugestie Olgi Tokarczuk (2020, s. 254) dotyczące literalizmu: „Człowiek cierpiący na literalizm widzi wszystko wyosobnione, bez kontekstów oraz relacji, i (...)”. Miałem odczucie, że w przypadku drogi hamowania tak też jest. Spojrzałem więc na nią oczami matematyka, fizyka, budowniczego autostrad, prawnika, konstruktora pojazdów. Naturalnie z nadzieją połączenia wszystkiego w całościowy obraz. Odpuściłem jedynie psychologom odstawiając czas reakcji kierowcy na inne tory. Teoretyczne modele połączyłem z klockami fizyków, klockami hamulcowymi, oponami, masą pojazdów, nawierzchnią autostrad. Być może ten element tematyki związanej z tarcie m zainteresuje uczniów i nauczycieli fizyki.

Droga hamowania matematyków s_m

Mickael Launay rozpisuje się barwnie o drodze hamowania. Skanuję te strony i wysyłam nauczycielkom fizyki: Wiesi, Małgosi, Dorocie i Łucji. Chciałbym, żeby skan trafił do uczniów. Ciekawość mnie zżera, czy uczniowie są w stanie dostrzec, że coś jest nie tak z tą matematyczną drogą hamowania.

Wysłałam strony też do studentów niestacjonarnych Akademii Kaliskiej wydziału politechnicznego z którymi mam zajęcia. Odzew słaby, ale też w zdecydowanej większości stwierdzający, że wszystko OK. A chodziło mi o fragment przedstawiony na rys. 1.

Droga hamowania pojazdów jest interesująca, ponieważ odpowiada dokładnie energii kinetycznej. Powiedzieć, że jest cztery razy dłuższa, oznacza ni mniej, ni więcej, że rozpędzony samochód miał cztery razy więcej energii.

Trzeba także podkreślić, że droga hamowania zależy od jeszcze jednego czynnika: masy. Jeżeli załadujesz samochód tak, że podwoisz jego masę, będzie on potrzebował dwa razy dłuższego odcinka, by się zatrzymać. Innymi słowy, energia kinetyczna rośnie wprost proporcjonalnie do masy. Spośród dwóch obiektów poruszających się z tą samą prędkością ten, który jest dwukrotnie cięższy, ma dwa razy większą energię.

Rys. 1. Fragment książki Mickaela Launay *Teoria parasola...*, s. 274

Zapiszmy to wzorem:

$$\frac{mV_0^2}{2} = k s_m$$

Naturalnie droga nie może odpowiadać dokładnie energii, więc jakąś stałą k wstawiamy, no i wymiar dajemy jej w niutonach.

Popatrzmy jakie to ma konsekwencje na autostradzie. Pędzę autostradą z prędkością 100 km/h osobówką o masie 1 tony, a obok z tą samą prędkością załadowany tir o masie 40 ton prowadzony przez kolegę. Obaj równocześnie hamujemy, aby spotkać się na kawie w zajeździe. Nic z tego, moja droga hamowania wyniosła 50 metrów, a tir był w stanie zatrzymać się dopiero po dwóch kilometrach (masa jest 40 razy większa) – takiego psikusa zrobiła kierowcy tira matematyka. Jako matematyk nie spotkałem się z kierowcą tira w zajeździe.

Droga hamowania fizyków s_f

Tu już fizyk wprowadzi siłę tarcia, więc mamy:

$$\frac{mV_0^2}{2} = mgf s_f$$

Jednakże ku zdziwieniu uczniów (i nie tylko) masy się uproszczą i droga hamowania okazuje się jednakowa dla osobówki i załadowanego tira, zależna jedynie od prędkości początkowej i współczynnika tarcia.

$$s_f = \frac{V_0^2}{2gf}$$

Jako fizyk spokojnie spotykam się z kierowcą tira w zajeździe na kawie. Można to zweryfikować na klockach o różnej masie, jak pisze Wojtek Dindorf na forum Borowiczan, już na poziomie szkoły podstawowej. Dla klocków ten matematyczny model dość dobrze opisuje rzeczywistość. No cóż, jednak po autostradzie nie klocki pędzą, to nie klockowa rzeczywistość.

Droga hamowania budowniczych autostrad s_b

Za sprawę biorą się budowniczy autostrad. Bohaterski współczynnik tarcia trafia na łamy przepisów urzędowych, oczywiście z całą metodologią jego wyznaczania.

DZIENNIK USTAW RZECZYPOSPOLITEJ POLSKIEJ

Warszawa, dnia 29 sierpnia 2019 r. Poz. 1644

ROZPORZĄDZENIE MINISTRA INFRASTRUKTURY z dnia 1 sierpnia 2019 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie przepisów techniczno-budowlanych dotyczących autostrad płatnych. (...)

4. Ocena właściwości przeciwpoślizgowych (s.7-8)

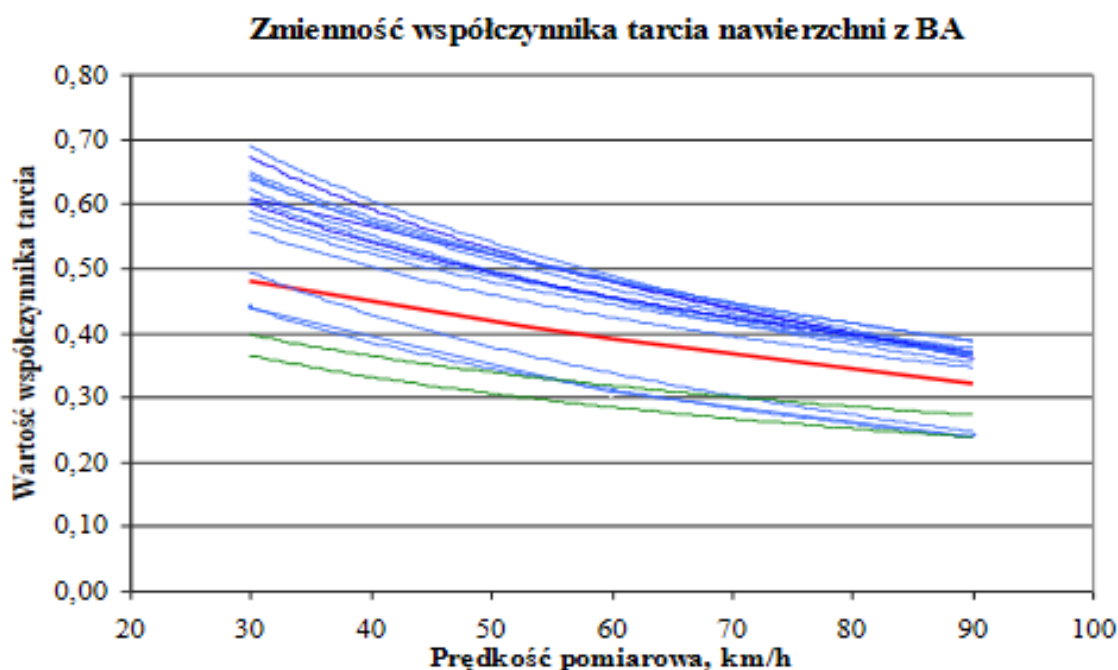
4.1. Przy ocenie właściwości przeciwpoślizgowych nawierzchni autostrady powinien być określony współczynnik tarcia na mokrej nawierzchni przy całkowitym poślizgu opony testowej.

4.2. Pomiar wykonuje się urządzeniem o pełnej blokadzie koła nie rzadziej niż co 50 m na nawierzchni zwilżanej wodą w ilości 0,5 l/m², przy 100% poślizgu opony testowej rowkowanej (ribbed tyre) rozmiaru 165 R 15 – zalecanej przez Światową Organizację Drogową (PIARC). (...) Uzyskane wartości współczynnika tarcia należy rejestrować z dokładnością do trzech miejsc po przecinku. Miarą właściwości przeciwpoślizgowych jest miarodajny współczynnik tarcia. Za miarodajny współczynnik tarcia przyjmuje się różnicę wartości średniej E(m) i odchylenia standardowego D : E(m) – D. Wyniki podaje się z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku. (...)

4.3. Minimalne wartości miarodajnego współczynnika tarcia nawierzchni dla konkretnej prędkości zablokowanej opony względem nawierzchni określone zostały w tabeli:

Element nawierzchni	Minimalna wartość miarodajnego współczynnika tarcia przy prędkości zablokowanej opony względem nawierzchni	
	30 km/h	60 km/h
Pasy ruchu zasadnicze, dodatkowe, awaryjne	0,48	0,44

Budowniczy urzędnik na tym skończy, po prostu do wzoru fizyków podstawia prędkość i współczynnik tarcia, oczywiście miarodajny. Dla 30 km/h otrzyma drogę hamowania około 7 m, dla 60 km/h – 32 m. Jednak za tymi liczbami stoją badania prawdziwych budowniczych autostrad (rys. 2). Skądś politycy muszą wziąć te liczby.



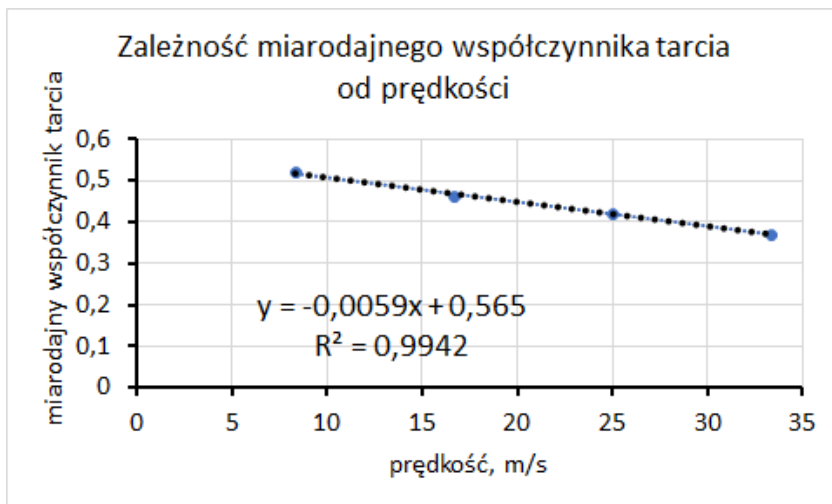
Rys. 2. Wyniki badań zależności współczynnika tarcia od prędkości pojazdu na nawierzchni wykonanej z betonowego asfaltu (BA). Czerwony kolor zarezerwowano dla miarodajnego współczynnika tarcia (Mechowski, 2005, s. 20)

Z tabeli 5 możemy odczytać miarodajne współczynniki tarcia (Mechowski, 2005, s. 16).

Tablica 5. Wymagane poziomy miarodajnego współczynnika tarcia dla dróg publicznych w odniesieniu do opony F.O. Dębica o wymiarach 165 R 13

Klasa drogi	Element nawierzchni	Miarodajny współczynnik tarcia przy prędkości zablokowanej opony względem nawierzchni			
		30 km/h	60 km/h	90 km/h	120 km/h
A	Pasy ruchu zasadniczego	0,52	0,46	0,42	0,37

Wrzucam liczby do Excela (rys. 3)

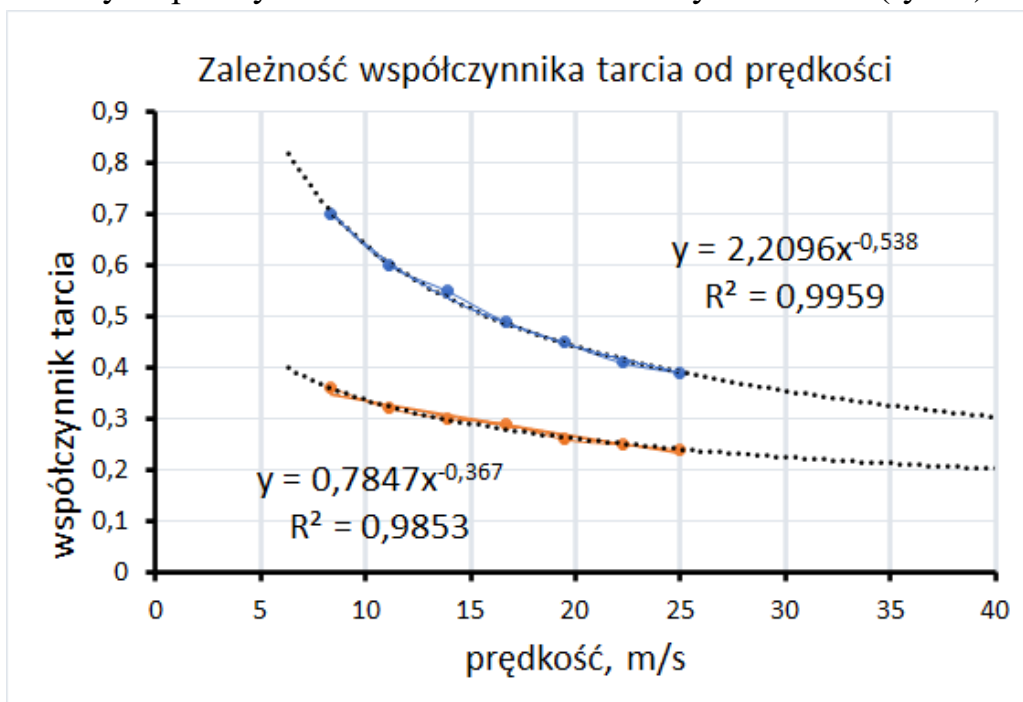


Rys. 3. Miarodajny współczynnik tarcia w zależności od prędkości pojazdu (opracowanie własne na podstawie tab. 5)

Zależność z wykresu zapiszemy wzorem:

$$f(V) = -0,006V + 0,57$$

Wybieram z danych eksperymentalnych pomiary obejmujące skrajne zakresy współczynnika tarcia. Wrzucam liczby do Excela (rys. 4).



Rys. 4. Zależności współczynników tarcia od prędkości dla skrajnych wyników (opracowanie własne na podstawie rys. 2)

Dla skrajnych wyników badań (sytuacji niekorzystnej i korzystnej dla kierowcy) możemy zapisać w przybliżeniu związek współczynnika tarcia z prędkością pojazdu (w układzie SI):

$$f(V) = 0,78V^{-0,37} \text{ sytuacja niekorzystna}$$

oraz

$$f(V) = 2,2V^{-0,54} \text{ sytuacja korzystna}$$

Fizyk naturalnie wyłowi z tego piękną zależność matematyczną:

$$f \sim \frac{1}{\sqrt{V}}$$

mając jednak świadomość stosowanych przybliżeń.

Oczywiście przy drodze hamowania prędkość maleje do zera, więc nie możemy od tak sobie podstawić powyższych zależności do wzoru na drogę hamowania fizyków. Obliczanie średnich typu „miarodajny współczynnik tarcia” służy budowlańcom i urzędnikom, ale dla kierowcy jadącego autostradą liczy się współczynnik tarcia „tu i teraz”. Trochę tak jak dla bezrobotnego informacja o średniej zarobków w kraju. Drogę hamowania musimy więc wyznaczać numerycznie „krok po kroku”. Najprostszy algorytm (prosta metoda Eulera) przedstawiono poniżej dla sytuacji najmniej korzystnej dla kierowcy:

$$s_{n+1} = s_n + V_n \Delta t$$

$$V_{n+1} = V_n - a_n \Delta t$$

$$a_n = 0,78gV_n^{-0,37}$$

Realizację algorytmu powierzamy dowolnemu językowi programowania lub arkuszowi kalkulacyjnemu.

	A	B	C
1	dt=	0,01	
2	v=	=60/3,6	
3			
4	t	v	s
5	=B\$1	=B\$2	=B5*B\$1
6	=A5+B\$1	=B5-0,78*9,81*B\$1*POTĘGA(B5;-0,37)	=C5+B6*B\$1
7	=A6+B\$1	=B6-0,78*9,81*B\$1*POTĘGA(B6;-0,37)	=C6+B7*B\$1
8	=A7+B\$1	=B7-0,78*9,81*B\$1*POTĘGA(B7;-0,37)	=C7+B8*B\$1

a/

	A	B	C
1	dt=	0,01	
2	v=	16,66666667	
3			
4	t	v	s
5	0,01	16,66666667	0,1667
6	0,02	16,63964703	0,3331
7	0,03	16,61261116	0,4992
8	0,04	16,58555902	0,665

b/

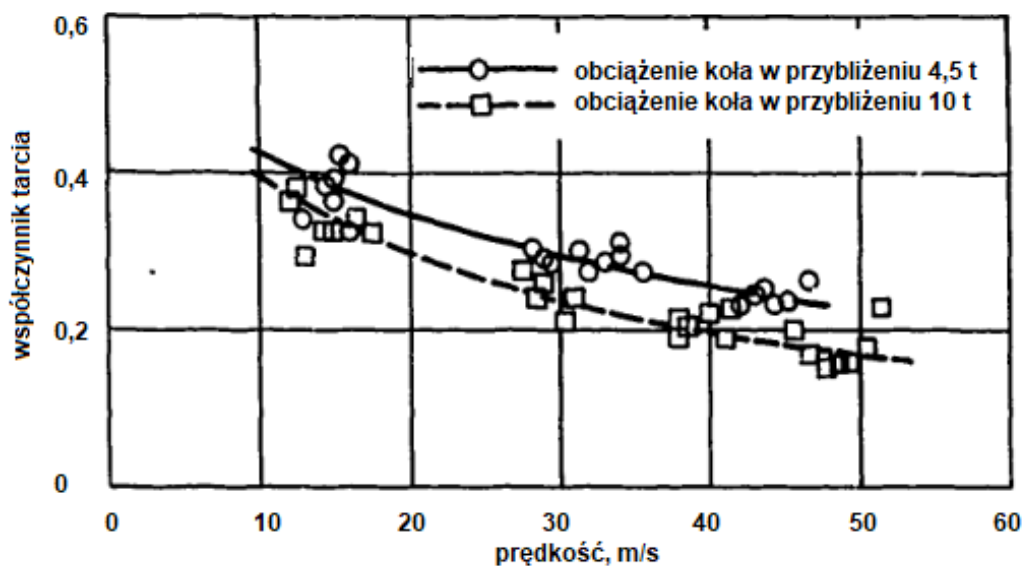
Rys. 5. Fragment realizacji algorytmu wyznaczania drogi hamowania w Excelu (a/ formuły, b/ liczby)(opracowanie własne)

Droga hamowania na tym odcinku wynosi 43,5 m i jest o ponad 11 metrów dłuższa niż w przypadku wzięcia pod uwagę miarodajnego współczynnika tarcia. Także jako budowniczy dróg spokojnie spotykam się z kierowcą tira w zajeździe na kawie. Różnica mas pojazdów nam nie przeszkodzi. Szkoda tylko metod numerycznych, które wyhamowały do zera

w szkolnej fizyce, pozostając jedynie orężem olimpijczyków (Plebański 2020, s. 97-100).

Droga hamowania konstruktorów pojazdów mechanicznych s_k

Budowniczych autostrad zajmuje współczynnik tarcia nawierzchni z wybraną oponą. I tylko opona łączy ich z konstruktorami pojazdów. Im też pozostawiają badanie związków masy pojazdu i układu hamulcowego z długością drogi hamowania. Użycie hamulców w samochodzie powoduje nagrzewanie się układu w wyniku tarcia klocków hamulcowych. Jeśli temperatura układu zwiększy się zbyt mocno, skuteczność hamowania zmniejszy się. Im większe obciążenie, tym większy udział siły związanej z układem hamulcowym i więcej energii cieplnej na klockach, tym razem hamulcowych. Natomiast przy zwiększonej masie oskarżana jest opona, której właściwości zmieniają się wraz z obciążeniem i temperaturą, wpływając na współczynnik tarcia. Pół wieku temu Amerykanie przeprowadzili badania w tym zakresie przy różnym obciążeniu samolotu hamującego po wylądowaniu (rys. 6).



Rys. 6. Średnie współczynniki tarcia uzyskane podczas hamowania samolotu na mokrym betonie przy pionowym obciążeniu koła wynoszącym około 4,5 t i 10 t. (Tomita 1970, s. 84)

Wzrost obciążenia trochę więcej niż dwukrotny zmniejsza średni współczynnik tarcia o około 0,05 w całym zakresie prędkości od 10 do 50 m/s.

W tym czasie konstruktorzy rosyjscy połączyli idealizację fizyków ze wszystkim co dodatkowo wydłuża drogę hamowania. Wprowadzili tzw. współczynnik skuteczności hamowania definiowany jako stosunek rzeczywistej

drogi hamowania do idealizacji fizyków. Drogę hamowania można wtedy wyrazić wzorem:

$$s_k = \frac{KV_o^2}{2gf}$$

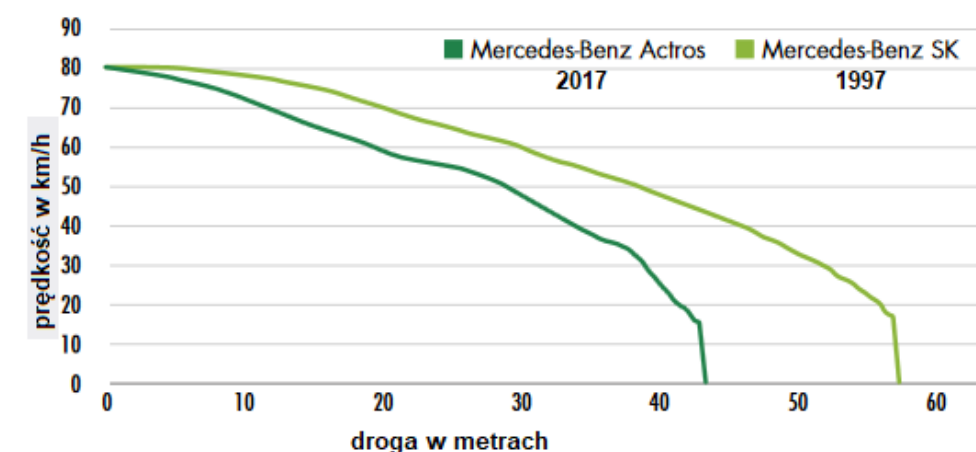
K – Współczynnik skuteczności hamowania zależny od specyfiki konstrukcji i stanu technicznego układu hamulcowego, wartości masy całkowitej pojazdu. Jego wartość wynosi 1,3 dla samochodów osobowych i 1,6-1,8 dla ciężarowych (Кленников, Ильин 1976).

Pozostawienie we wzorze współczynnika tarcia nie bardzo odpowiadało konstruktorom. Zmodyfikowali więc zasadę zachowania energii zostawiając opóźnienie jako wielkość charakteryzującą pojazd w czasie hamowania. Pozbyli się w ten sposób współczynnika tarcia, ukochanego parametru budowniczych dróg.

$$\frac{mV_o^2}{2} = mas_k \text{ gdzie } a < fg$$

$$s_k = \frac{V_o^2}{2a}$$

Postęp techniczny spowodował, że układy hamulcowe stawały się coraz sprawniejsze. Po dwudziestu latach sytuacja zmieniła się niepomniernie. W teście przeprowadzonym przez DEKRA Accident Research i Crash Test Center porównano skuteczność hamowania nowoczesnej ciężarówki i ciężarówki z lat 90 (rys. 7, rys 8a). Oba zestawy pojazdów zostały załadowane do łącznej masy 38,5 tony. Celem badań było wykazanie różnic w drodze hamowania od prędkości 80 km/h w identycznych warunkach środowiskowych (Petersen 2018, s. 55).



Rys. 7. Wykres zmian prędkości na drodze hamowania dla dwóch samochodów (Petersen 2018, s. 55)

Testy wykazały, że średnie opóźnienie nowoczesnej ciężarówki wynosiło około 6 m/s^2 , a droga hamowania około 41 metrów. Średnie opóźnienie starej ciężarówki to $4,3 \text{ m/s}^2$, natomiast droga hamowania 57 metrów. Miejsca zatrzymania się od równego startu pokazuje rys. 8a (<https://vimeo.com/272534945>).



Rys. 8. Zdjęcia samochodów w chwili zakończenia hamowania (Petersen 2018, s. 55)

Ciekawe jest również porównanie drogi hamowania nowego i lekkiego samochodu osobowego z nowoczesnym samochodem ciężarowym (tym samym co w poprzednim teście). Samochód ciężarowy wypadł tylko nieznacznie gorzej (rys. 8b).

Korzyści?

Wraz ze skracaniem drogi hamowania znacznie obniżyła się liczba śmiertelnych ofiar w wypadkach na drogach (Danielson 2017, s. 27).

Nauczyciel fizyki może swobodnie oddychać w czasie lekcji – droga hamowania fizyków mocno zbliżyła się do rozmiarów rzeczywistych, skracająca się we wzorze masa pojazdu już nie musi budzić podejrzeń, udoskonalone klocki hamulcowe uwiarygodniły doświadczenia z klockami.

Literatura

Danielson J. (2017), *A caminho da “Visão Zero” com a abordagem das três vias*, w: „DEKRA Relatório de segurança rodoviária”.

DEKRA - Crash Animation – Bremsvergleich, <https://vimeo.com/272534945>

Dindorf W. (2020), *Bujdy o niesfornym bucie*, „Moja Fizyka” Uniwersytet Opolski.

Dindorf W. (2021), *Tajemnica toczenia*, „Moja Fizyka” Uniwersytet Opolski.

Dziennik Ustaw Rzeczypospolitej Polskiej, Warszawa, dnia 29 sierpnia 2019 r. Poz. 1644.

Grupa dyskusyjna „Borowicewkudowie”.

Кленников В. М., Ильин Н. М. (1976), *Автомобиль. Учебник водителя первого класса*. Москва: Транспорт,

Launay M. (2020), *Teoria parasola, czyli jak matematyka wywraca świat do góry nogami*, Kraków: Wydawnictwo Feeria.

Mechowski T. (2005), *Analiza i weryfikacja wymagań i procedur pomiarowych oceny właściwości przeciwpoślizgowych nawierzchni dróg publicznych i autostrad płatnych*, Warszawa: Instytut Badawczy Dróg i Mostów.

Petersen E. (2018), *O potencial de otimização ainda não foi alcançado*, w: „DEKRARElatório de segurança rodoviária”.

Plebański S. (2020), *Belfry w przyciasnych reformach. Pół wieku rozciągania*, Kraków: Oficyna Wydawnicza Impuls.

Tokarczuk O. (2020), *Czuły narrator*, Kraków: Wydawnictwo Literackie.

Tomita H. (1970), *Tire-pavement friction coefficients*, Naval Civil Port Hueneme, California: Engineering Laboratory,