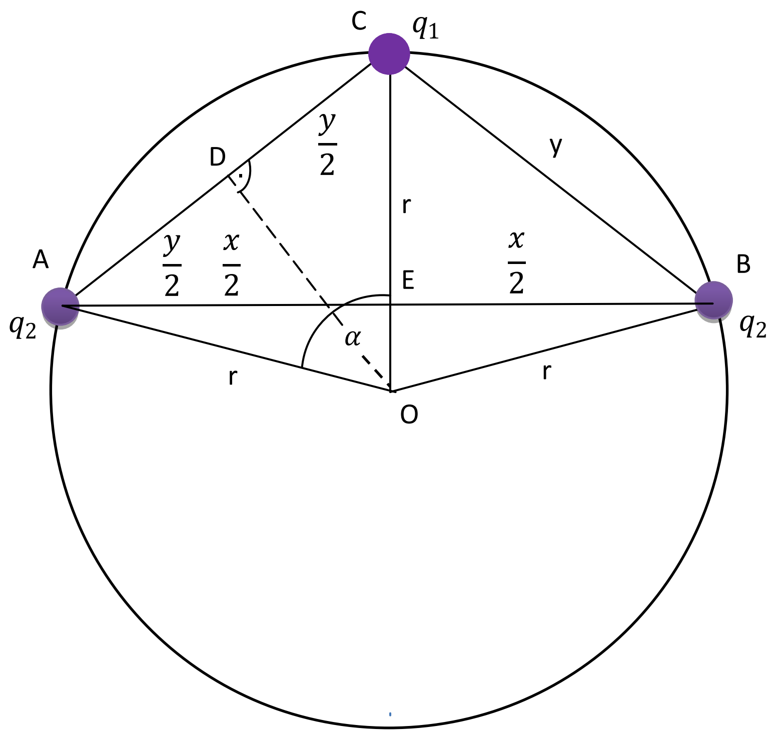
Zadanie teoretyczne
z XVII Olimpiady Fizycznej

Treść zadania[1])

Po okręgu leżącym w płaszczyźnie poziomej mogą poruszać się bez tarcia trzy kulki.Na pierwszej z tych kulek znajduje się ładunek q_1,a na każdej z dwóch pozostałych ładunek q_2.Kulki ustawiły się tak,że odległość między dwiema kulkami o ładunku q_2 równa się promieniowi okręgu.Jaki jeststosunek ładunkuq_1 do ładunku q_2?

Zadanie zostało rozwiązanedla przypadku jednakowych znaków ładunków q_1 iq_2.Istnieje drugie rozwiązanie, gdy są one różnoimienne.W stanie równowagiukładu ładunkówelektrycznychq_1 ,q_2,q_2 ich energia potencjalna przyjmuje wartość ekstremalną.Zależność ta została wykorzystanaprzyobliczeniustosunku $\frac{q_1}{q_2}$.

1) Niechq_1 >0 i q_2 <0 lub q_1<0 i q_2>0(rys.1)



Rys.1

Z trójkąta AOE mamy

$\frac{x}{2} = r \sin \alpha$

stąd

x=|AB|$= 2r\sin\alpha$(1)

Podobnie z trójkąta AOD wynika,że

$$\frac{y}{2} = r\sin\frac{\alpha}{2}$$

zatem

$$y = |AC| = 2r\sin\frac{\alpha}{2} \quad (2)$$

Energia potencjalna$E_p$układu ładunków elektrycznychq_1,q_2, q_2 wynosi

$$E_p = \frac{2k_0q_1q_2}{y}+\frac{k_0q_2^2}{x} \quad (3)$$

gdziek_0 =$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$;$\varepsilon_0$- przenikalność dielektryczna próżni

Podstawiając (1) i (2) do (3) otrzymujemy

$$E_p(\alpha)=\frac{k_0q_1q_2}{r\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{k_0{q_2}^2}{2r\sin\alpha} \quad (4)$$

Energia potencjalna$E_p$przyjmuje wartość ekstremalną dla określonej zależności między ładunkami elektrycznymiq_1iq_2.Aby ją znaleźć obliczamy pochodną $\frac{dE_p(\alpha)}{d\alpha}$,którą następnie przyrównujemy do zera.

$\frac{dE_p(\alpha)}{d\alpha}$=0 (5)

$$-\frac{k_0q_1q_2}{2r}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{sin^2\frac{\alpha}{2}}-\frac{k_0q_2^2}{2r}\cdot\frac{\cos\alpha}{sin^2\alpha}=0$$

Stąd po przekształceniach

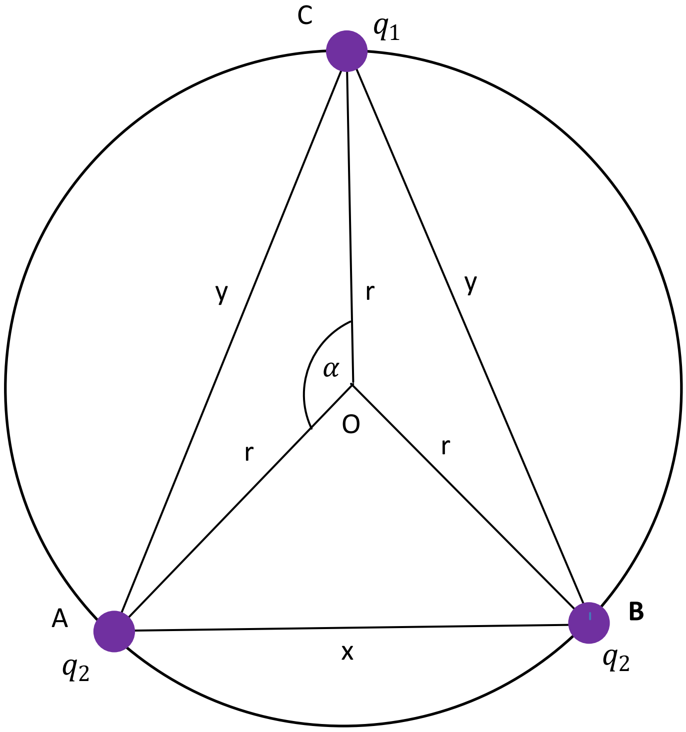
$\frac{q_1}{q_2}= -\frac{1}{4}\cdot\frac{\cos\alpha}{cos^3\frac{\alpha}{2}}$ (6)

Odległości x=|AB|=r między ładunkami$q_2$odpowiada kąt$\alpha = \frac{\pi}{6}$

Zatem z (6) mamy

$\frac{q_1}{q_2} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{6}}{cos^3\frac{\pi}{12}}\approx -0.2$

2) Niechq_1 >0 iq_2>0 lubq_1<0, iq_2<0 (rys.2)



Rys.2

Odległości x=|AB|=rmiędzy ładunkami odpowiada kąt α=$\frac{5\pi}{6}$.

Z (6) otrzymujemy

$\frac{q_1}{q_2}$= -$\frac{1}{4}\cdot\frac{\cos\frac{5\pi}{6}}{cos^3\frac{5\pi}{12}}\approx 12{,}5$

Brak jednoznacznie określonego znaku ładunkówq_1iq_2 w treści zadania daje możliwość dwóch wersji rozwiązań.W przypadku ładunków różnoimiennychq_1 i $q_2$równowaga układu będzie ,gdy$\frac{q_1}{q_2}\approx$ -0.2 ,a dla ładunków jednakowego znaku$\frac{q_1}{q_2}\approx 12{,}5$ Łatwo wykazać,że dla tak określonej proporcji ładunków$\frac{q_1}{q_2}$i odpowiadającej jej kątowi α druga pochodna$\frac{d^2E_p(\alpha)}{d\alpha^2}$przyjmuje wartość dodatnią.

$$\frac{d^2E_p(\alpha = \frac{\pi}{6};\frac{q_1}{q_2} \approx -0.2)}{d\alpha^2} > 0$$

oraz

$$\frac{d^2E_p(\alpha = \frac{5\pi}{6}; \frac{q_1}{q_2} \approx \ 12.5)}{\mathrm{d}\alpha^2} > 0$$

Układładunków elektrycznychq_1,q_2 ,q_2 posiada więc minimalną energię potencjalną.Jest on zatem w stanie równowagi trwałej.

[1])CzesławŚcisłowski,Olimpiady Fizyczne XVII i XVIII,PZWS,s.20-23.

Wiesław Piasko