



Rozkład Poissona

I. Cel ćwiczenia

Zapoznanie ze statystycznym sposobem opisu zagadnień związanych z promieniowaniem jądrowym oraz z rozkładami statystycznymi stosowanymi w fizyce jądrowej. Praktyczne zastosowanie rozkładu Poissona w statystycznym opracowaniu wyników pomiarów rejestracji promieniowania jądrowego.

II. Obowiązujący zakres materiału

1. Statystyczny sposób opisu zagadnień związanych z promieniowaniem jądrowym
2. Rozkłady statystyczne: dwumianowy, Poissona, Gaussa.
3. Warunek przejścia rozkładu Poissona w rozkład Gaussa
4. Definicje: zmiennej losowej, dyspersji, odchylenia standardowego

III. Literatura

1. K. Małuszyńska, M. Przytuła, „Laboratorium fizyki jądrowej” PWN, Łódź 1969.
2. T. Hilczer, „Ćwiczenia z fizyki jądrowej” UAM Poznań 1975.
3. J. M. Massalski, „Detekcja promieniowania jądrowego”, PWN, Warszawa 1959.
4. W.I. Goldanski, „Statystyka pomiarów przy rejestracji promieniowania jądrowego” PWN, Warszawa 1963.
5. W. J. Price, „Detekcja promieniowania Jądrowego” PWT, Warszawa 1960.
6. G.E. Pustowałow, „Fizyka Jądrowa i atomowa” PWN, Warszawa 1975.
7. Sz. Szczeniowski, cz. VI „Fizyka Doświadczalna. Fizyka jądra i cząstek elementarnych” PWN, Warszawa 1974.

IV. Podstawy teoretyczne

1. Wstęp

Wyniki pomiarów dowolnej wielkości fizycznej, ze względu np. na bardzo dużą liczbę niekontrolowanych i różnorodnych oddziaływań, mogą mieć charakter statystyczny z możliwością wystąpienia fluktuacji wielkości mierzonej. W przypadku pomiarów wielkości lub zjawisk mikroskopowych – takich jak np. rozpady promieniotwórcze jąder - fluktuacje wyników pomiarów związane są głównie z istotą zjawiska i fluktuacji podlega sama mierzona wielkość natomiast przyrząd pomiarowy możemy uznać za na tyle dokładny, że nie wnosi dodatkowych niepewności. Wówczas, jeżeli w wielokrotnych pomiarach tej samej wielkości X otrzymujemy szereg różnych, wartości: x_1, x_2, \dots, x_i to fluktuują one nie wokół wartości prawdziwej bo takiej – w przypadku pomiarów zdarzeń statystycznych – nie ma, lecz wokół wartości średniej arytmetycznej \bar{x} poszczególnych pomiarów:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

Ta średnia wartość jest dobrym przybliżeniem lub inaczej estymatorem mierzonej prawdziwej wielkości. Jak dobrym jest to przybliżenie określa nam odchylenie od wartości średniej. Wielkość odchylenia (tzw. rozrzut wyników od wartości średniej) określa się za pomocą dyspersji lub odchylenia standardowego



Pracownia Radioizotopowa

Ćwiczenie 4

(średni błąd kwadratowy). Dyspersję D definiuje się jako wartość średnią kwadratów różnic między wartością średnią a wartościami wyników pomiarów:

$$D = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \{x_i - \bar{x}\}^2 \quad (2)$$

natomiast pierwiastek kwadratowy dyspersji:

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \{x_i - \bar{x}\}^2} \quad (3)$$

nazywamy - znanym z teorii niepewności pomiarowych – średnim błędem kwadratowym (Wielkość ta jest estymatorem odchylenia standardowego w tzw. rozkładzie Gaussa).

Jeżeli wartości jakiejś zmiennej określone są przypadkowo to mówimy, że zmienna ta jest zmienną losową. Zmienna losowa jest to wielkość, która w wyniku pomiaru przyjmuje jedną i tylko jedną wartość ze zbioru wszystkich wartości, jakie może ta zmienna przyjmować, przy czym wartości tej nie można przewidzieć przed wykonaniem pomiaru. Zmienne losowe mogą mieć charakter ciągły lub dyskretny (nieciągły).

Jeżeli każdej wartości x_1, x_2, \dots, x_i dyskretnej doświadczalnie otrzymanej zmiennej losowej X przyporządkowane jest pewne prawdopodobieństwo p_1, p_2, \dots, p_i to prawdopodobieństwa te można traktować jako funkcję określoną na zbiorze wartości x_i . Wówczas: rozkładem zmiennej losowej X nazywa się prawdopodobieństwo tego, że zmienna ta przybiera wartości x_i : $P(X = x_i) = p_i, (i = 1, 2, \dots)$ Prawdopodobieństwo tego, że zmienna losowa X przyjmie jakąkolwiek wartość ze zbioru wszystkich wartości, które może przyjąć jest równe jedności:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1 \quad (4)$$

Rozkład wyników, wielokrotnie powtarzanych pomiarów dla procesów przypadkowych daje się opisać funkcją zwaną rozkładem Poissona który jest granicznym przypadkiem tzw. rozkładu dwumianowego.

Niech interesującym nas zdarzeniem będą akty rozpadu promieniotwórczego w układzie n jąder. Mają one jak najbardziej charakter statystyczny, tzn. mogą być określone tylko z pewnym prawdopodobieństwem, ponieważ ze względu na ogromną ilość jąder podlegających rozpadowi nie można przewidzieć, kiedy nastąpi rozpad konkretnego jądra. Dodatkowo samo zjawisko emisji z jądra fotonu (przemiana γ), elektronu (przemiana β^-) lub pozytonu (przemiana β^+) ma też charakter statystyczny, tj. możemy je opisać podając jedynie prawdopodobieństwo jego zajścia. Rozpad jąder atomowych jest więc zdarzeniem przypadkowym niezależnym od obecności i stanu innych jąder. Mierzoną wielkością może być ilość rejestrowanych przez licznik promieniowania cząstek pochodzących z tego rozpadu, ilość ta będzie zmienną losową. Ze względu na statystyczny charakter tych zjawisk, w ciągu równych okresów czasu licznik będzie rejestrował różną ilość cząstek.

Jeżeli przez k oznaczymy liczbę jąder, które już uległy rozpadowi to $n-k$ oznaczać będzie liczbę jąder które jeszcze nie rozpadły się. Z kolei, jeżeli prawdopodobieństwo rozpadu dowolnego, pojedynczego jądra w danym przedziale czasu jest równe p to prawdopodobieństwo, że jądro to nie ulegnie rozpadowi w tym czasie jest równe $q = (1 - p)$. W rozpatrywanym zjawisku mamy do czynienia ze zdarzeniem złożonym – jądro ulegnie rozpadowi lub nie. W takim razie zgodnie z twierdzeniem o iloczynnie prawdopodobieństw stosowanym w przypadku zdarzeń złożonych, prawdopodobieństwo rozpadu k jąder i prawdopodobieństwo, że $n-k$ jąder jeszcze nie rozpadło się można zapisać w postaci iloczynu:

$$p^k q^{n-k} = p^k (1-p)^{n-k} \quad (5)$$

Ponieważ rozpad jąder jest zjawiskiem statystycznym to jest wszystko jedno, które z jąder z ich ogólnej

liczby n ulegnie rozpadowi i zdarzenie polegające na rozpadowie k jąder może być zrealizowane na $\binom{n}{k}$

sposobów gdzie:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (6)$$

jest symbolem Newtona.



Pracownia Radioizotopowa

Ćwiczenie 4

Całkowite prawdopodobieństwo zajścia w określonym przedziale czasu k rozpadów w układzie n jąder jest równe:

$$W_k^n = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad (7)$$

lub po uwzględnieniu (6):

$$W_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}, \quad (8)$$

Ponieważ wyrażenie

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(k+1)]}{k!}, \quad (9)$$

jest równe współczynnikowi k -tego członu dwumianu Newtona n -tego stopnia wyrażania (7) i (8) nazywane są *rozkładem dwumianowym* który opisuje prawdopodobieństwo rozpadu k spośród n jąder w danym przedziale czasu. Oznaczmy przez \bar{k} średnią liczbę jąder rozpadających się w tym samym czasie, zatem prawdopodobieństwo p rozpadu dowolnego jądra w określonym przedziale czasu można określić jako iloraz:

$$p = \frac{\bar{k}}{n}. \quad (10)$$

Wówczas rozkład dwumianowy (8) można zapisać następująco:

$$W_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\bar{k}}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\bar{k}}{n}\right)^{n-k}, \quad (11)$$

a po uwzględnieniu równania (9) otrzymamy:

$$\begin{aligned} W_k^n &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\bar{k}}{n}\right)^k \frac{\left(1 - \frac{\bar{k}}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\bar{k}}{n}\right)^k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(k+1)]}{k!} \frac{\left(\frac{\bar{k}}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\bar{k}}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\bar{k}}{n}\right)^k} = \\ &= \frac{\left(\frac{\bar{k}}{n}\right)^k n(n-1)(n-2)\dots[n-(k+1)] \left(1 - \frac{\bar{k}}{n}\right)^n}{k! n^k \left(1 - \frac{\bar{k}}{n}\right)^k} = \\ &= \frac{\left(\frac{\bar{k}}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\bar{k}}{n}\right)^n}{k!} \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(k+1)]}{n^k} \frac{1}{\left(1 - \frac{\bar{k}}{n}\right)^k} = \\ &= \frac{\left(\frac{\bar{k}}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\bar{k}}{n}\right)^n}{k!} \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{\bar{k}}{n}\right)^k} \end{aligned} \quad (12)$$



W granicy dla bardzo dużych wartości n wyrażenie $\frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{\left(1 - \frac{\bar{k}}{n}\right)^k}$ dąży do 1, natomiast

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\bar{k}}{n}\right)^n = e^{-\bar{k}}$, tak więc można napisać ostatecznie:

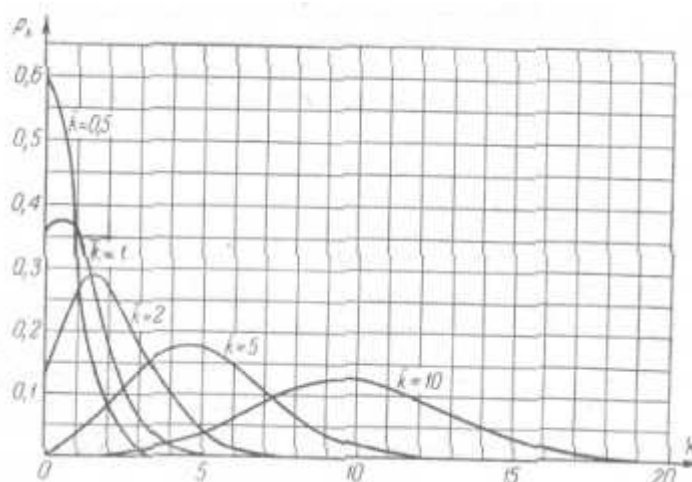
$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_k^n = p_k = \frac{(\bar{k})^k}{k!} e^{-\bar{k}} \quad (13)$$

Wyrażenie: $p_k = \frac{(\bar{k})^k}{k!} e^{-\bar{k}}$ nosi nazwę *rozkładu Poissona* i w naszym przypadku określa ono prawdopodobieństwo tego, że w zadanym przedziale czasu licznik zarejestruje k zliczeń, gdy średnia liczba wszystkich zliczeń jest równa \bar{k} .

Rozkład ten jest rozkładem jednoparametrowym (zależnym tylko od wartości średniej $\bar{k} = np$) stosowanym przy niewielkiej liczbie pomiarów. Oczywiście z powodu wystąpienia fluktuacji zachodzących procesów, prawdopodobieństwo to będzie duże dla liczby k bliskiej średniej \bar{k} a małe dla k znacznie różniącej się od średniej, która jednoznacznie określa rozrzut liczby zliczeń. Z rozważań teoretycznych odnośnie rozkładu Poissona wynika, że wartość fluktuacji wielkości k wokół wartości średniej – czyli dyspersja D – jest równa:

$$D_{\text{teor}} = \bar{k} \quad (14)$$

Zależność prawdopodobieństwa p_k od wartości k (rozkład Poissona) dla różnych \bar{k} przedstawia rys.1.



Rys. 1. Zależność prawdopodobieństwa uzyskania k zliczeń dla różnych \bar{k}

Należy zwrócić uwagę, że dla małych wartości \bar{k} ($\bar{k} < 10$) rozkład Poissona jest asymetryczny. Z wykresu widać, że nie wszystkie wartości k występują z taką samą częstością. Jeśli k jest bliskie wartości średniej prawdopodobieństwo p_k jest duże, w przeciwnym przypadku jest małe. Dla $\bar{k} > 10$ rozkład jest już bardziej symetryczny względem wartości średniej \bar{k} . Wówczas wygodniej jest dla



Pracownia Radioizotopowa

Ćwiczenie 4

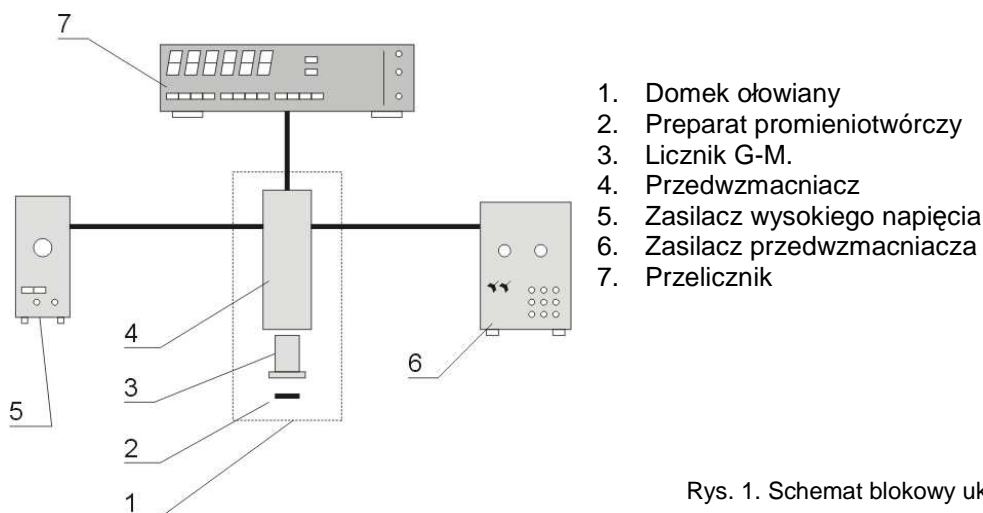
charakteryzowania rozkładu wyników pomiarów zastosować rozkład normalny (Gaussa). W rozkładzie tym przy dokonywaniu wielokrotnego pomiaru danej wielkości, otrzymane wartości (przy bardzo dużej liczbie pomiarów) mają ciągły rozkład, symetryczny względem wartości średniej. Rozkład ten jest charakteryzowany przez dwa parametry: wartość średnią \bar{k} i odchylenie standardowe σ :

$$p_k = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(k-\bar{k})^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (15)$$

Rozkład ten jest szeroko stosowany do opisu danych doświadczalnych nie tylko rozpadów promieniotwórczych. σ oblicza się zgodnie ze wzorem (3) a \bar{k} wzorem (1).

V. Część doświadczalna

– Schemat blokowy układu pomiarowego



Rys. 1. Schemat blokowy układu pomiarowego

– Wykonanie ćwiczenia

1. W obecności prowadzącego zajęcia lub opiekuna pracowni włączyć przyrządy układu pomiarowego i dobrać takie wartości napięcia pracy licznika G-M i czas pojedynczego pomiaru aby liczba zliczeń impulsów pochodzących od t_{λ} była równa ok. 7-10.
2. Dla ustalonego przedziału czasu zmierzyć co najmniej 300 razy liczbę impulsów t_{λ} . Wyniki zapisać w tabeli.

– Opracowanie wyników

1. Obliczyć ilość N_k pomiarów w których otrzymano k zliczeń.
2. Określić tzw. doświadczalne prawdopodobieństwo (doświadczalny rozkład Poissona) wystąpienia k zliczeń w pojedynczym pomiarze korzystając ze wzoru:

$$P_{k\text{eksp}} = \frac{N_k}{\sum_{k=0}^n N_k} \quad (16)$$

gdzie n jest liczbą pomiarów.



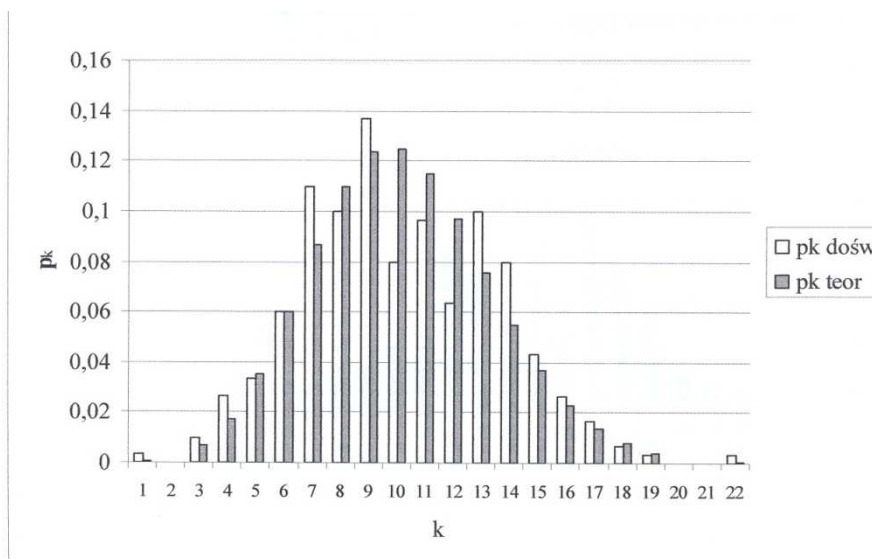
Pracownia Radioizotopowa

Ćwiczenie 4

3. Na podstawie danych doświadczalnych wyliczyć średnią liczbę zliczeń na podstawie wzoru:

$$\bar{k} = \frac{\sum_{k=0}^n kN_k}{\sum_{k=0}^n N_k} \quad (17)$$

4. Na wspólnym rysunku sporządzić wykres słupkowy doświadczalnego rozkładu prawdopodobieństwa uzyskania k zliczeń w pojedynczym pomiarze (wzór (16)) oraz wykres słupkowy teoretycznego rozkładu prawdopodobieństwa obliczonego na podstawie wzoru (13). Przykładowy wykres pokazano na rys.2.
5. Korzystając z danych doświadczalnych obliczyć: dyspersję D (wzór (2)) gdzie $x_i=k_i$ oraz $\bar{x} = \bar{k}$ i odchylenie standardowe $\sigma = \sqrt{D}$ i porównać otrzymane wyniki z wartościami teoretycznymi: dyspersji określonej zależnością (14) i $\sigma_{\text{teor}} = \sqrt{D_{\text{teor}}}$.
6. Prześledzić ewolucję doświadczalnego rozkładu Poissona w zależności od ilości wykonanych pomiarów (wykonać wykresy słupkowe rozkładu dla 50, 100, 150, 200 i 300 pomiarów).
7. Obliczyć niepewności pomiarowe dla doświadczalnie wyznaczonych wielkości.
8. Przedyskutować:
a) uzyskane wyniki tzn. różnice pomiędzy otrzymanymi w pkt. 5 wartościami doświadczalnymi i teoretycznymi,
b) wpływ ilości pomiarów na ewolucję doświadczalnego rozkładu Poissona.



Rys.2. Przykładowy wykres doświadczalnego i teoretycznego rozkładu Poissona

– **Proponowane tabele wyników pomiarów**

Tabela I

Nr pomiaru	k[imp]	Nr pomiaru	k[imp]	Nr pomiaru	k[imp]



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Materiał bezpłatny współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Pracownia Radioizotopowa

Ćwiczenie 4

Tabela II

k	N_k	kN_k	$P_{k \text{ eksp}}$	$P_{k \text{ teor}}$	$\Delta p_{k \text{ eksp}}$